

14-лекция

Төртбұрыштар тақырыбын оқыту.

Жоспары:

1. Төртбұрыштар ұғымын енгізудің әртүрлі мүмкіндіктері. Төртбұрыш
2. Параллелограмм ұғымының анықтамасы.
3. Параллелограммның қасиеттері мен белгілері
4. Трапеция.

Әдебиеттер:

1. Рахымбек Д., Кенеш Ә.С. Мектеп геометрия (планиметрия) курсының оқыту әдістемесі: Оқу құралы. / Д. Рахымбек, Ә.С. Кенеш – Алматы: Эверо, 2015. – 320 б.
2. Мектеп оқулықтары
3. Мұғалімге арналған оқу-әдістемелік құралдар

1. Төртбұрыштар ұғымын енгізудің әртүрлі мүмкіндіктері

Төртбұрыштармен оқушылар бұрыннан таныс. Төрт қабырғасы, төрт бұрышы бар фигураны олар төртбұрыш деп таниды. Тіктөртбұрыш пен квадратты да ажырата алады. Бұл тақырыпты оқытудағы оқушылар үшін жаңалық төртбұрыштардың дөңес және дөңес емес деп жіктелуі, дөңес төртбұрыштардың жаңадан параллелограмм, трапеция, ромб деген дербес түрлерін оқып-үйренуінде.

Төртбұрыш ұғымын анықтағаннан кейін параллелограмм немесе трапеция ұғымдарының қайсысы алдын енгізілуі керек деген мәселеге, оқулық авторларының төртбұрыштың жіктелуінің қандай түрін басшылыққа алуына байланысты.

Дөңес төртбұрыштарды жіктеудің негізгі ретінде төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының өзара параллель немесе параллель еместігі қабылданып, дөңес төртбұрыштар үш түрге: қабырғалары параллель емес төртбұрыштарға, трапециялар мен параллелограмдарға жіктеледі.

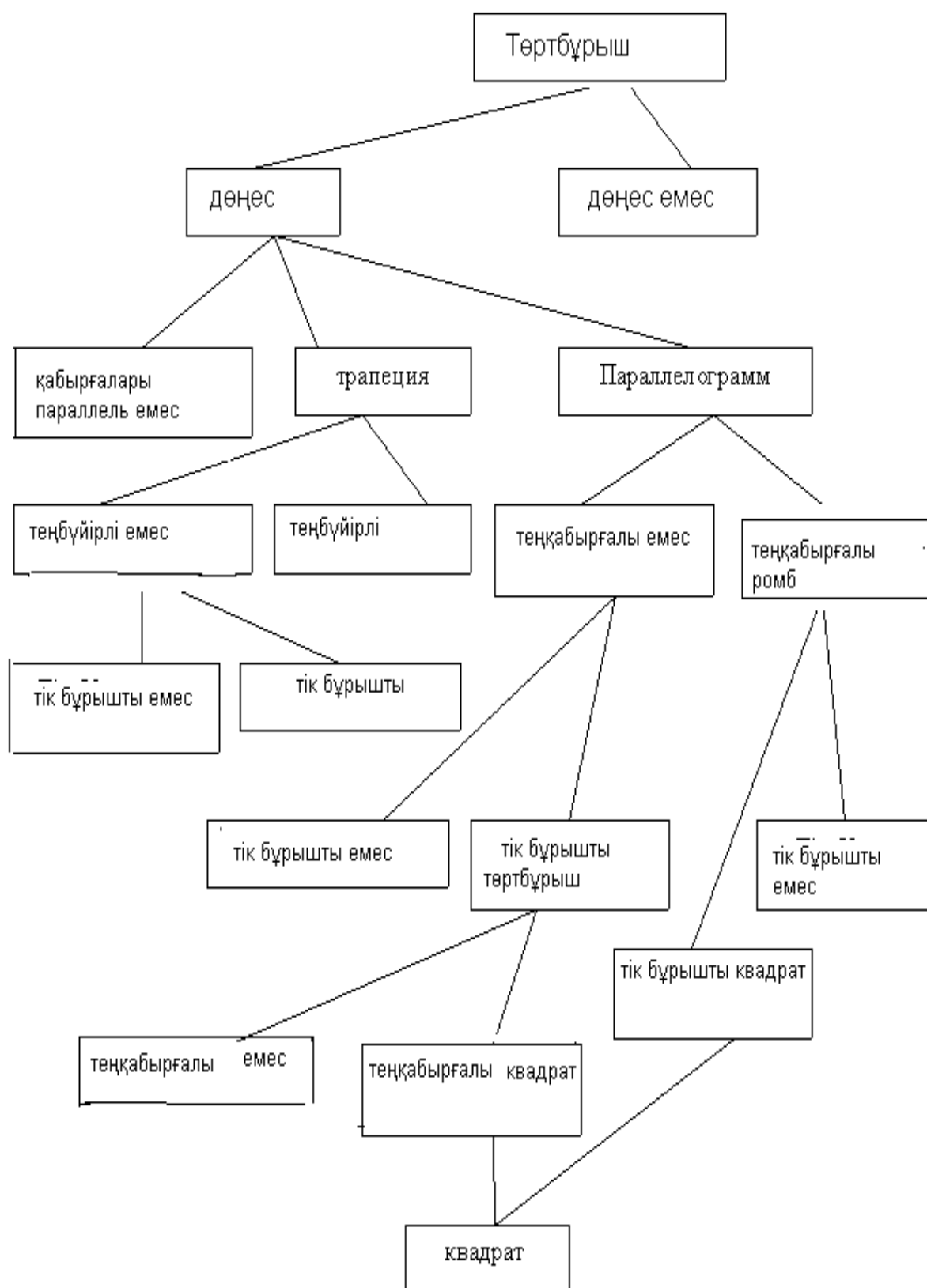
Параллелограмды жіктегенде іргелес қабырғаларының тең немесе тең еместігіне байланысты (параллелограмм және ромб), сонымен бірге параллелограмды тікбұрышының болуы немесе болмауы бойынша (параллелограмм және тіктөртбұрыш), ал ромбы тік бұрышының болуы немесе болмауына байланысты (ромбының өзі және квадрат), тіктөртбұрыш іргелес қабырғаларының тең не тең еместігіне байланысты (тікбұрыш және квадрат) жіктеледі.

Трапециялар бүйір қабырғаларының ұзындығы бойынша (тең бүйірлі, тең бүйірлі емес трапеция) жіктеледі; одан соң тең бүйірлі емес трапеция өз кезегінде тікбұрышты және тік бұрышты емес трапеция болып бөлінеді.

Төртбұрыштардың жіктелуі бір мәнді емес. Жоғарыдағы жіктеме бойынша трапеция мен параллелограмның да тектік ұғымы төртбұрыш. Дөңес төртбұрыш екі қабырғасының параллель болуына қарай жіктелетін болса, онда екі параллель қабырғалары бар төртбұрыш, параллель қабырғалары жоқ төртбұрыш болып екі топқа бөлінер еді. Екі қабырғасы параллель былайғы екі қабырғасы параллель емес төртбұрыш трапеция болатындықтан, оның параллель емес екі қабырғасы деформациялану нәтижесінде параллель болып қалуы да мүмкін, демек трапеция екіге жіктелінеді: трапеция және параллелограмм.

Сонда параллелограмм бүйір қабырғалары параллель трапеция ретінде анықталатын болады. Мұндай жағдайда төртбұрыштар жіктелуінде мынадай өзгерістер болады:

Төртбұрыштардың жіктелімі



Төртбұрыштарды жіктеу схемасы

а) Дөңес төртбұрыштар үшке емес, екіге бөлінеді: екі қабырғасы параллель емес төртбұрыш және трапеция;

ә) трапеция екі топқа бөлінеді: параллелограмм емес трапеция және параллелограмм бөлінеді;

б) одан ары қарай жіктеме өзгеріссіз қалады.

Төртбұрыштардың жіктелуінің осындай болуының да толықтай құқығы бар. Әдістемелік әдебиеттерде [8],[10] дөңес төртбұрыштардың осындай жіктелуі дұрыс, әрі логикалық түсінікті деп есептеледі.

Егер параллелограмды бүйір қабырғалары параллель трапеция ретінде

анықтасақ, онда «трапецияның бүкіл қасиеттері автоматты түрде параллелограмға өтеді» [8]. Ондай жағдайда параллелограмның тегі болатын теңбүйірлі трапецияның табанындағы бұрыштар тең деген қасиет параллелограмға да тиісті болған болар еді.

Қазіргі мектеп оқулықтарында дөңес төртбұрыштар жіктелуін құрудың тектік және түрлік (генетикалық) сипатын айқын түрде түсіндіруге мүмкіндік беретін, параллелограмдар мен трапециялар алынады.

Осы генезис бір фигураның екіншісінен шығуын түсіндіруге, сол геометриялық образдарды анығырақ қабылдауға, олардың арасындағы байланыстарды түсіндіруге, тектік ұғымның қасиеттерін оның жекелеген түрлеріне таратуға мүмкіндік береді.

Дөңес төртбұрыштың жекелеген түрлерінің анықтамасын құру кезіндегі генетикалық байланыстарды түсіндіру ерекше маңызға ие: оқушылар алғаш рет ұғымның тектік және түрлік белгілерінің салыстырмалы сипатын түсіну мүмкіндігіне ие болады. Сонымен, мысалы дөңес төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалар жұбының параллелдігі оның түрлік белгісі болып табылады да, осының салдарынан осы төртбұрышқа параллелограмм атауы беріледі. Ал тіктөртбұрыш немесе ромб ұғымы үшін ол белгісі - қарама-қарсы қабырғалар жұбының параллелдігі - тектік белгі болып қалады.

Осындай жағдайда оқушы мына ойды айқын түсіну керек: кез келген параллелограмм төртбұрыш болғанымен, кез келген төртбұрыш параллелограмм емес, сол сияқты кез келген тіктөртбұрыш параллелограмм болғанымен, параллелограмның барлығы да тіктөртбұрыш бола бермейді т.с.с.

Төртбұрыш ұғымын енгізу мәселесі де әр түрлі оқулықтарда түрліше. Төртбұрыш ұғымын бір түзудің бойында жатпайтын төрт нүкте және оарды тізбектей косатын төрт кесінді арқылы пайда болған фигура ретінде анықталады немесе алдымен көпбұрыш ұғымы анықталады да, төртбұрыш оның дербес түрі ретінде қарастырылады. Бұл оқулық авторларының таңдаған теориялық бағытына байланысты болады.

Төртбұрыш. Төртбұрыш тақырыбы VIII сыныптың геометрия курсына өтілетін алғашқы тақырып. Жазғы демалыс кезінде оқушылар алдыңғы оқу жылында өтілген негізгі бағдарламалық материалды ұмытыңқырап қалады. Сондықтан VIII сыныптың алғашқы екі-үш сабағында алдымен VII сыныптағы негізгі геометриялық материалдарды белгілі бір жүйе бойынша қайталап өткен жөн: түзу және кесінді, бұрыштар (оларды анықтау, орналасуы, салыстыру), параллель және перпендикуляр түзулер, үшбұрыштар (анықтамасы, түрлері, қасиеттері мен белгілері) т.б.

Оқулыққа сәйкес төртбұрыш, дөңес және дөңес емес төртбұрыш ұғымдарына анықтама тұжырымдалады.

Оқытушы сыныпта төрт буыннан тұратын жылжымалы сынық сызықтың моделін көрсетіп, оны деформациялай отырып, 4 буыннан тұратын әртүрлі төртбұрыш моделдерін көрсетеді. Оны үшбұрыштың моделімен салыстырады.

Осы салыстырулардан оқушылар үшбұрыштың тұрақты формаға ие болатын, өзгермейтін қатқыл фигура деп аталатындығын; ал төртбұрыш бұрыштар шамасының өзгеруіне байланысты түрлі форманы қабылдауы мүмкін, сондықтан ол қатқыл фигура бола алмайды деген қорытындыға келеді.

Сонымен, үшбұрышқа қарағанда төртбұрыштың ішкі бұрыштарының шамасы өзгере отырып, төртбұрыш формасы өзгеруіп тұрады екен. Бұл кезде “төртбұрыштың бүкіл ішкі бұрыштарының қосындысы да өзгере ме?” - деген сұрақ туындайды.

Оқытушы оқушыларға бұл сұраққа жауаптың кез келген төртбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы жайлы теореманы дәлелдегеннен кейін ғана алынуы мүмкін екендігін хабарлайды.

Егер төртбұрыштың қарама-қарсы екі төбесін түзумен қоссақ, онда төртбұрыш екі үшбұрышқа бөлінеді де, оның формасы қатқыл түрге келеді.

Сәйкес тәжірибені төртбұрыштың қозғалмалы моделінде көрсетуге болады

Оқытушы оқушыларға төртбұрыштың қарама-қарсы екі төбесін қосатын кесінді оның *диагонали* деп аталатынын айтады. Оқушылар осы жаңа ұғым анықтамасын қайталайды.

Содан соң төртбұрыштың екінші диагоналын жүргізуге болатыны айтылады. Оқушылар соңында төртбұрыштың бір төбесінен тек бір ғана диагональ, ал барлығы оны төрт үшбұрышқа бөлетін тек екі диагональ жүргізуге болатынын біледі.

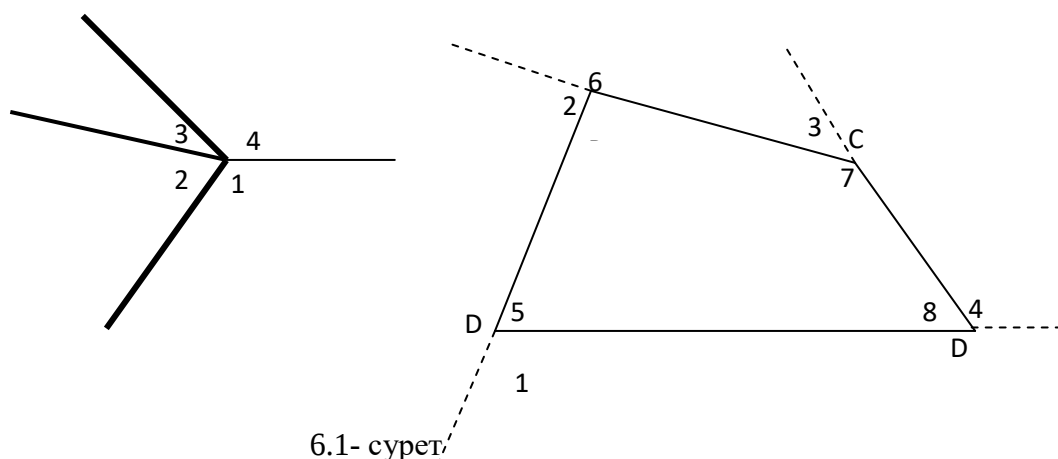
Енді төртбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы жайлы теоремаға өтуге болады. Бұл теореманы оқушыларға келесі тапсырма түрінде ұсынуға болады: төртбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысын анықтау керек.

Оқушылар кез келген дөңес төртбұрышты салып, тапсырма шарты мен оның сұрағын жазады.

Төртбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысын анықтау үшін тапсырма түрінде ұсынылған бұл теорема, оқушылардың қызығушылығын біршама жоғарылатып, өз кезегінде өз күшіне сенімділігінің, бастамашылдығы мен төзімділігінің дамуына жол ашады.

Теореманы дәлелдеп болған соң, оқушылар төртбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысына есептер шығарады. Мысалы, төртбұрыш бұрыштары 1:2:3:4 қатынасты болса, онда оның бұрыштарын анықтау керек және т.б.

Енді төртбұрыш формасының өзгеруі кезінде оның ішкі бұрыштарының қосындысы өзгер ме? – деген сұраққа жауап беруге болады. Төртбұрыштың ішкі бұрыштарының қосындысы 360° және ол төртбұрыштың ішкі бұрыштарының өзгеріс шамасымен байланысты емес.



Оқытушы оқушылар есіне төртбұрышта ішкі бұрыштардан өзге оның сыртқы бұрыштарының да болатынын айтады. Төртбұрыштың сыртқы бұрыштарының қосындысы анықтау тапсырмасы қойылады.

Тапсырма шешімін сыбайлас бұрыштар қасиеттерін пайдалана отырып немесе ортақ төбеге барлық сыртқы бұрыштарды параллель көшіре отырып табуға болады (6.1- сурет).

2.Параллелограмм. Параллелограмм ұғымымен және оның сәйкес терминімен оқушылар бірінші рет кездесіп отыр. Сондықтан параллелограмм ұғымын енгізуге мақсатты дайындық жүргізіледі.

Тақтаға сызылған немесе интерактив тақтада бейнеленген дөңес төртбұрыштар көрсетіледі. Ол төртбұрыштардың ішінде параллель қабырғалары жоқ, екі параллель қабырғасы бар (трапеция), екі жұп параллель қабырғалары бар (параллелограмм, тіктөртбұрыш, ромб, квадрат) болуы керек. Оларды параллель қабырғалары жоқ, параллель қабырғалары бар деп екі топқа бөледі. Параллель қабырғалары бар төртбұрыштардың өзі екі жікке бөлінеді: екі ғана параллель қабырғалары бар және екі жұп параллель қабырғалары бар. Мұғалім екі жұп параллель қабырғалары немесе қабырғалары қос-қостан параллель төртбұрыштарды **параллелограмм** деп айтынын айтады.

Параллелограммның дербес түрлері тіктөртбұрыш, квадрат, ромб параллелограмм ұғымының құрамында көрсетілуі оның көлемі туралы дұрыс көзқарас қалыптасуына септігін тигізеді.

Мұғалімнің нұсқауымен оқушылар сынып бөлмесінің ішінен параллелограммды тауып көрсетеді. Одан кейін оқушыларға параллелепипед пен призма моделін көрсетіп, оларға осы моделдердегі параллелограмдарды табуды ұсынуға болады.

Енді параллелограмм ұғымының анықтамасын тұжырымдалады.

Анықтама. Қарама-қарсы қабырғалары қос-қостан параллель төртбұрыш **параллелограмм** деп аталады.

Кейін оқушылар сызғыш немесен үшбұрышты сызғышты пайдалана отырып, параллелограмм сызады да, оның төбелерін әріптермен белгілейді. Параллелограммның екі параллель қабырғалары - табандары, ал қалған екеуі – бүйір қабырғалары деп аталады. Параллелограммның параллель қабырғаларының кез келген жұбын оның табаны ретінде қабылдауға болады.

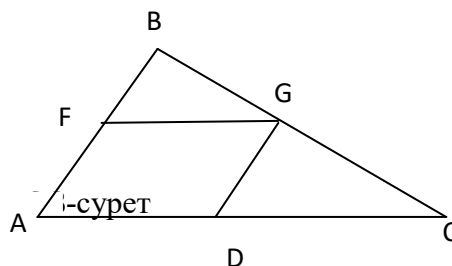
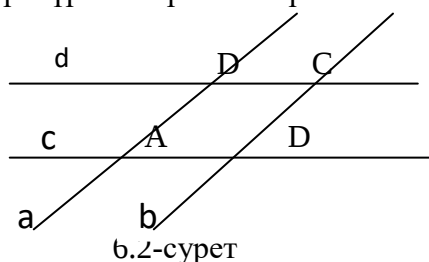
Параллелограмм анықтамасын енгізуде оқушылардың басты назарын анықтаманың мағынасына аударылады. Басқаша айтқанда, « $ABCD$ - параллелограмм», делінсе, анықтамадан шығатын оның қасиетіне сәйкес параллель қабырғаларды анықтай алуы керек: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ және оларды есеп шығару кезінде пайдалануы тиіс. Бұл дағдыны қалыптастыру бүкіл тақырыпты оқып-үйрену үдерісінде өтеді.

Әдеттегідей, анықтаманы енгізгенде оқушылардың назарын барлық төртбұрыштардың ішінен параллелограммды айқындауға мүмкіндік беретін белгіге, яғни төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының параллель болу керектігіне аудару қажет.

Параллелограммның анықтамасын бекіту үшін оқушыларға дайын сызбалар бойынша төменде келтірілген ауызша есептерді ұсынуға болады.

Алғашқы екі есеп, параллелограмм анықтамасына келтіре білу (параллелограмм бұл: 1) төртбұрыш; 2) екі қабырғасы параллель және де 3) екі қабырғасы параллель болуы) дағдысын қалыптастыруға, үшінші алдымен анықтамадан салдар шығаруға, одан кейін анықтамадағы параллелограммның белгісіне сәйкес оны тани білуге, ал төртіншісі параллелограммның анықтамасынан салдар шығара (қолдана) білу дағдысын қалыптастыруға бағытталған.

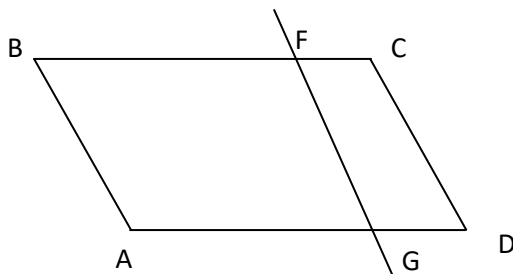
1. а және b түзулерінің с және d түзулерімен қиылысуы нәтижесінде төртбұрыш пайда болады. Егер: а) $a \parallel b$, $c \nparallel d$; б) $a \parallel b$; $c \parallel d$; в) $a \nparallel b$; $c \nparallel d$ (6.2-сурет) болса, $ABCD$ төртбұрыш параллелограмм болатынын, болмайтынын анықтаңыздар.



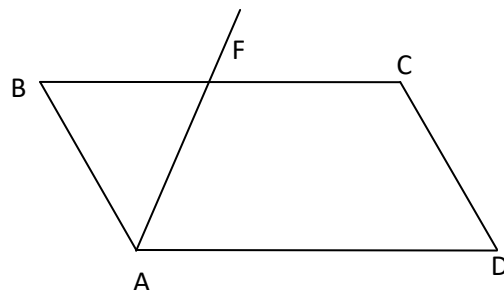
2. ABC үшбұрышында AB және CD қабырғаларына параллель DG және FG түзулері жүргізілген. AFGD төртбұрышының (6.3-сурет) түрін анықтаңыздар.

3. ABCD параллелограммының AB қабырғасына параллель FG түзуі жүргізілген. ABFG төртбұрышының түрін анықтаңыздар (6.4-сурет).

4. ABCD параллелограммының A төбесінен шығып, BC қабырғасын F нүктесінде киятын биссектриса жүргізілген. ABF үшбұрышының тең бүйірлі болатынын дәлелдеңіздер (6.5-сурет).



6.4-сурет



6.5-сурет

Параллелограммның қасиеттері. Параллелограммның қасиеттерін тұжырымдау және оны дәлелдеу үшін оқушыларға жасампаздық тапсырма беріледі:

- Параллелограммның қарама-қарсы қабырғалары туралы не айтуға болады? Теорема тұжырымда.

- Параллелограммның қарама-қарсы бұрыштары туралы қандай қорытындыға келуге болады? Оны теорема түрінде тұжырымдап айт.

- Бір қабырғасына іргелес бұрыштары туралы не айтуға болады? Оны теорема түрінде тұжырымда.

- Параллелограммның диагоналдарының қиылысу нүктелері туралы не айтуға болады?

Талқылау нәтижесіне параллелограммның мынадай қасиеттері белгілі болады.

1. Параллелограммның қарама-қарсы қабырғалары тең.

2. Параллелограммның қарама-қарсы бұрыштары тең.

3. Параллелограммның диагоналдары қиылысу нүктесінде қаж бөлінеді.

4. Параллелограммның кез келген бір қабырғасына іргелес екі бұрышының қосындысы 180° .

Параллелограммның қасиеттері тақтада және оқушы дәптерлерінде төмендегідей өрнектеледі:

ABCD – параллелограмм болса,

1. $AB=CD$, $AB \parallel CD$ (6.6,а-сурет);

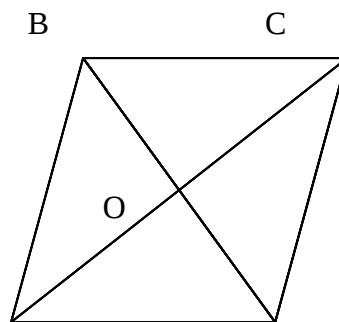
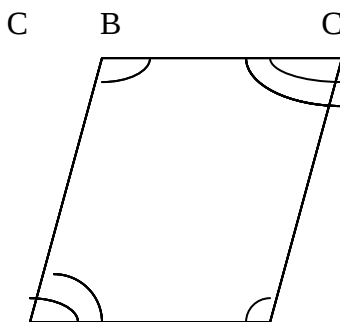
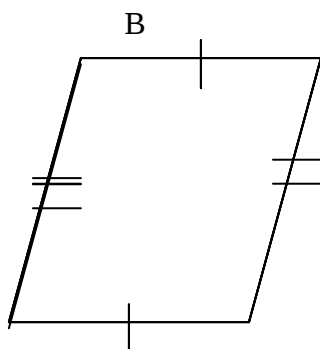
2. $AB=CD$, $AD=BC$ (6.6,а-сурет);

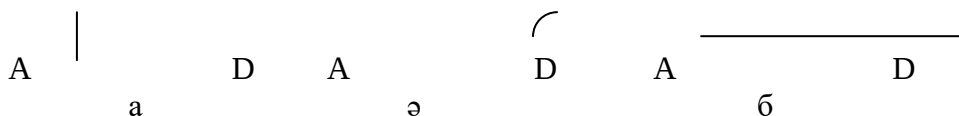
3. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ (6.6,ә-сурет);

4. $AO=OC$, $BO=OD$ (6.6,б-сурет);

5. $\angle A + \angle B = 180^\circ$, $\angle B + \angle C = 180^\circ$, $\angle C + \angle D = 180^\circ$, $\angle D + \angle A = 180^\circ$.

(6.6,ә-сурет).





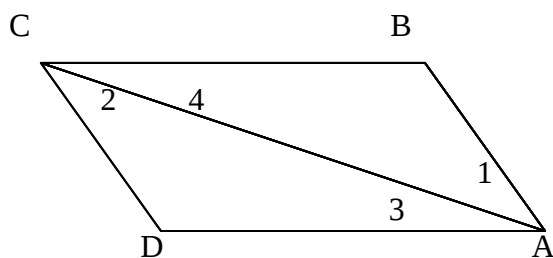
6.6- сурет

Параллелограмның бұл қасиеттерін сыныпта талқылағаннан кейін, біреуін дәлелдеп, қалғандарын үйде дәлелдеп келуді ұсынуға болады. Немесе сынып оқушылары төрт топқа бөлініп әрбір топ бір тапсырмадан орындайды, әрбір топ өздерінің дәлелдемелерін ұсынады.

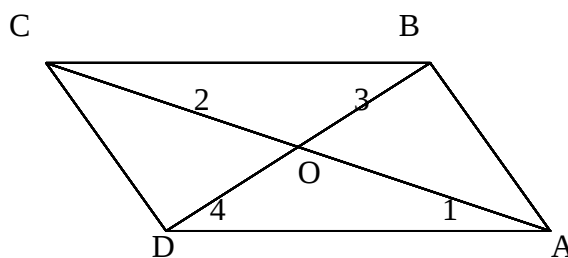
Геометрия оқулықтарында параллелограмның қарама-қарсы қабырғалары тең және қарама-қарсы бұрыштары тең деген екі қасиетті біріктіріп бір теорема түрінде тұжырымдап, бірге дәлелдеу қабылданған.

Теорема. Параллелограмның қарама-қарсы қабырғалары тең және қарама-қарсы бұрыштары да тең.

Дәлелдеуі. $ABCD$ параллелограмының AC диагонали оны екі ABC және CDA үшбұрыштарына бөледі (6.7-сурет). Мұнда $AB \parallel CD$ болғандықтан, айқыш бұрыштар ретінде $\angle 1 = \angle 2$ және $AD \parallel BC$ болғандықтан, $\angle 3 = \angle 4$. Онда ABC және ADC үшбұрыштарының бір қабырғасы ортақ және оған іргелес сәйкес бұрыштары тең, яғни үшбұрыштар теңдігінің II белгісі бойынша бұл үшбұрыштар тең. Олай болса, $AB = CD$, $AD = BC$, $\angle B = \angle D$ және $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ болғандықтан, $\angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C$. Теорема дәлелденді.



6.7- сурет



6.8- сурет

Теорема. Параллелограмның диагональдары қиылысу нүктесінде қаж бөлінеді.

Дәлелдеуі. $ABCD$ параллелограмын қарастыралық (6.8 - сурет). AC және BD диагональдарының қиылысу нүктесі O болсын. Параллелограмның қарама-қарсы қабырғалары теңдігінің қасиеті бойынша $AD = BC$ және айқыш бұрыштар ретінде $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Онда үшбұрыштар теңдігінің II белгісі бойынша $\triangle AOD = \triangle COB$. Осыдан $AO = OC$ және $BO = OD$. Теорема дәлелденді.

Параллелограмның қарама-қарсы қабырғаларының теңдігі туралы қасиетін бекіту үшін оқушыларға төмендегі ауызша есептерді ұсынуға болады:

1. $ABCD$ параллелограмының AB және BC қабырғалары сәйкесінше 9 см және 6 см. CD және AD қабырғалары неге тең?

2. $ABCD$ параллелограмының AB және BC қабырғалары сәйкесінше 9 см және 6 см. $ABCD$ параллелограмының периметрі неге тең.

3. Параллелограмның периметрі 28, оның бір қабырғасы 9 см. Параллелограмның барлық қабырғасын тап.

4. Параллелограмның периметрі 38. Параллелограмның көршілес жатқан қабырғаларының қосындысы неге тең?

Осы сияқты ауызша есепті параллелограмның қарама-қарсы бұрыштарының теңдігі мен бір қабырғасына іргелес бұрыштардың қосындысы туралы қасиетін бекітуге де ұсынуға болады:

1. $ABCD$ параллелограмының $\angle A = 43^\circ$. Параллелограмның қалған бұрыштарының градусдық өлшемін табыңыздар.

2. Параллелограмның қарама-қарсы екі бұрышының қосындысы 132° . Осы бұрыштардың әр қайсысының градустық өлшемін табыңыз.

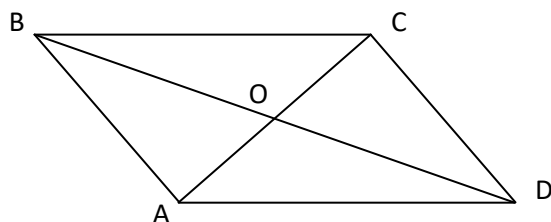
3. Параллелограмның екі бұрышының қосындысы 120° . Бұл бұрыштар параллелограмның бір қабырғасына тиісті болуы мүмкін бе?

4. Параллелограмның бір бұрышы екіншісінен 12° кіші. Бұл бұрыштар қарама-қарсы бұрыштар болуы мүмкін бе?

Параллелограмның диагональдарының қасиеті туралы теореманы бекіту үшін оқушыларға дайын сызбамен берілген келесі есепті ауызша шығаруға ұсынылады (6.6 - сурет).

1. ABCD параллелограмының BD диагоналі 12 см. О нүктесі параллелограмның диагональдарының қиылысу нүктесі. DO кесіндісі неге тең?

2. О нүктесі ABCD параллелограмының диагональдарының қиылысу нүктесі. Егер $AO=9$ см болса, AC диагоналі неге тең?



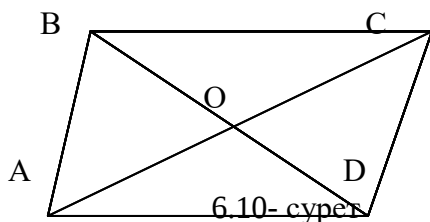
6.9-сурет

3. ABCD параллелограмының AD қабырғасы 9 см, ал оның диагональдары 14 см және 10 см. О нүктесі диагональдарының қиылысу нүктесі. AOD үшбұрышының периметрі неге тең?

4. ABCD параллелограмының диагональдары тең. О нүктесі - диагональдардың қиылысу нүктесі. AOD үшбұрышы тең бүйірлі екенін дәлелдеңіздер.

Осыдан кейін параллелограмның қасиеттерін пайдаланып оқулықтан есептер шығарылады.

1-есеп. ABCD параллелограмының диагональдары О нүктесінде қиылысады. Параллелограмның периметрі 12, ал BOC және COD үшбұрыштарының периметрлерінің айырмасы 2. Параллелограмның қабырғаларын тап.



Берілгені: ABCD – параллелограмм

$$P_{ABCD} = 12, P_{BOC} - P_{COD} = 2.$$

Табу керек:

$$AB, BC, CD, AD.$$

6.10- сурет

Шешуі. 1. $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD =$ |параллелограмның қарама-қарсы қабырғалары тең| $= 2(BC + CD) = 12 \Rightarrow BC + CD = 6.$

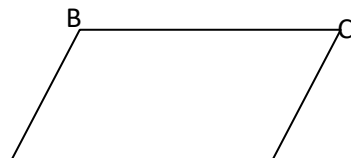
2. $P_{BOC} - P_{COD} = (BC + BO + OC) - (CD + CO + OD) =$ |параллелограмның диагональдары қиылысу нүктесінде қак бөлінетін болғандықтан $BO = OD$ | $= BC - CD = 2 \Rightarrow BC = CD + 2.$

$$3. BC + CD = 6 \Rightarrow CD + 2 + CD = 6 \Rightarrow CD = 2.$$

$$4. BC + 2 = 6 \Rightarrow BC = 4.$$

Жауабы: 2; 4; 2; 4.

2-есеп. Екі бұрышының айырмасы 70° болатын параллелограмның бұрыштарын табыңыз.



Берілгені. ABCD-параллелограмм,
 $\angle B - \angle A = 70^\circ$.

Табу керек: $\angle A - ? \angle B - ?$

Шешуі. Есептің шарты және
 параллелограмның
 бұрыштарының қасиеті бойынша:

$$\begin{cases} \angle B - \angle A = 70^\circ \\ \angle A + \angle B = 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \angle B = 125^\circ \\ \angle A = 55^\circ \end{cases}$$

Жауабы. 55° және 125° .

6.11-сурет

3-есеп. Параллелограммның сүйір бұрышы 30° -қа тең. Бір төбесінен екі қабырғасына түсірілген биіктердің қосындысы 15 см. Параллелограммның периметрін табыңыз.

Берілгені: ABCD-параллелограмм,

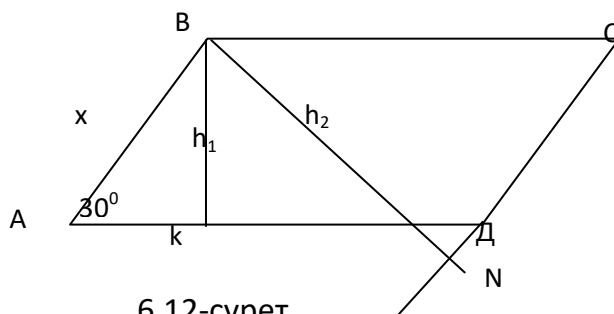
$$h_1 + h_2 = 15 \text{ см}, \angle BAD = 30^\circ$$

Табу керек: $p = 2(x + y) - ?$

Шешуі.

$$\triangle ABCK \text{ -нан: } h_1 = \frac{x}{2};$$

$$\triangle BCN \text{ -нан } h_2 = \frac{y}{2};$$



Сонда

$$p = 2(2h_1 + 2h_2) = 4(h_1 + h_2) = 4 \cdot 15 = 60 \text{ см}$$

6.12-сурет

Жауабы. 60 см

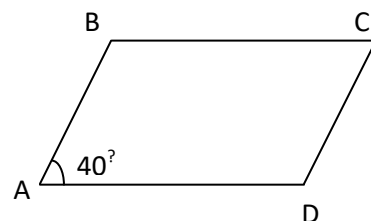
4-есеп. Параллелограммның бір бұрышы 40° , оған тең емес бұрышын табыңыз.

Берілгені: ABCD- параллелограмм, $\angle A = 40^\circ$.

Табу керек: $\angle B = \angle D - ?$

Шешуі. Айталық, $\angle B = \angle D = x$ болсын. Сонда
 $\angle A = \angle C = 40^\circ$, параллелограмның
 бір қабырғасына іргелес екі бұрышының
 қосындысы 180° болатындықтан,
 $x + 40^\circ = 180^\circ$. бұдан $\angle B = \angle D = 140^\circ$.

Жауабы. 140°



6.13-сурет

5-есеп. Параллелограмм биссектрисасы қарсы жатқан қабырғасын 4 см және 5 см кесінділерге бөледі. Параллелограмм периметрін табыңыз.

Берілгені: ABCD- параллелограмм, AK- биссектриса,

$$\angle BAK = \angle KAD, BK = 4 \text{ см},$$

$$KC = 5 \text{ см}.$$

Табу керек: $P = 2(a + b) - ?$

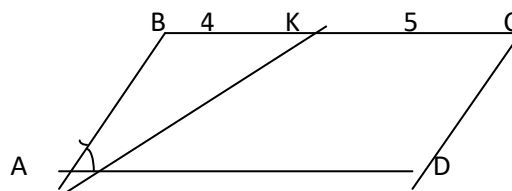
$$\text{Шешуі. } BC = a = BK + KC = 4 + 5 = 9 \text{ см},$$

$$AB = BK = 4 \text{ см},$$

өйткені, $\angle BAK = \angle KAD$

$$\text{Демек, } P = 2(a + b) = 2(9 + 4) = 26 \text{ см}$$

Жауабы. 26 см



6.14-сурет

6-есеп. ABCD параллелограмының периметрі 10 см. Егер ABD үшбұрышының периметрі 8 см болса, BD диагоналінің ұзындығын табыңыз.

Берілгені: ABCD- параллелограмм, $P_{ABCD}=10\text{см}$,

$P_{\triangle ABD}=8\text{ см}$.

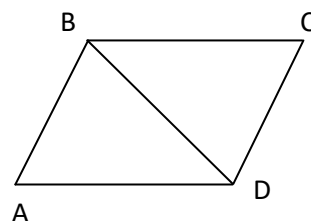
Табу керек: BD-?

Шешуі: Есептің шарты бойынша:

$$2(a+b)=10, a+b=5,$$

$$P_{\triangle ABD}=a+b+x=8, \text{ бұдан, } x=8-(a+b)=8-5=3\text{ см.}$$

Жауабы. 3 см



6.15-сурет

Осы сияқты, қарама-қарсы қабырғалары мен бұрыш дігі, диагонаалдарының қиылысу нүктесінде қак бөлінетіні, бір қабырғасына іргелес бұрыштарының қосындысы туралы параллелограмның қасиеттері қолданылатын есептер үй тапсырмасына және өз бетінше орындайтын жұмстарға да беріледі.

Параллелограмның белгілері. Параллелограмм белгілерін дәлелдемес бұрын оқушыларға олардың бұдан бұрын «белгі» ұғымымен кездескенін еске түсіру қажет, мәселен: тең бүйірлі үшбұрыштың белгісі, параллель түзулердің белгісі, т.с.с.

Параллелограмның белгілерін тұжырымдап айту үшін параллелограмның қасиеттеріне кері теорема тұжырымдау ұсынылады. Ол үшін кесімді түрдегі параллелограмның қасиеттерін шартты түрде тұжырымдау керек.

Егер төртбұрыш ABCD – параллелограмм болса, онда

1) $AB=CD, AB\parallel CD$;

2) $AB=CD, AD=BC$;

3) $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$;

4) $AO=OC, BO=OD$;

5) $\angle A + \angle B = 180^\circ, \angle B + \angle C = 180^\circ, \angle C = \angle D = 180^\circ, \angle D + \angle A = 180^\circ$. болады.

Теореманың шарты мен қорытындысының орнын ауыстырып, кері теорема тұжырымдасақ, ол теорема параллелограмның белгісі болады.

1. Егер ABCD төртбұрышының $AB=CD, AB\parallel CD$ болса, ABCD - параллелограмм болады.

2. Егер ABCD төртбұрышының $AB=CD, AD=BC$ болса, ABCD - параллелограмм болады.

3. Егер ABCD төртбұрышының $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$ болса, ABCD - параллелограмм болады.

4. Егер ABCD төртбұрышының $AC\cap BD = O$ және $AO=OC, BO=OD$ болса, ABCD - параллелограмм болады.

Параллелограмның бір қабырғасына іргелес бұрыштарының қосындысы туралы қасиетіне кері сөйлем теорема бола алмайды. Төртбұрыштың бір қабырғасына іргелес бұрыштарының қосындысы 180° болса, ол төртбұрыш әр уақытта параллелограмм бола бермейді, ол төртбұрыш трапеция болып қалуы мүмкін.

Параллелограмның белгілерін дәлелдеу үшін параллелограмның анықтамасына келтіру әдісі пайдаланылады. Яғни, дәлелдеу теорема шарттарын қанағаттандыратын төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғаларының қос-қостан параллель екендігін дәлелдеуге негізделген. Сондықтан бірінші кезекте оқушыларға екі түзудің параллельдік белгілері мен қасиеттерін ауызша жаттығулар арқылы қайта жаңғыртады.

Параллелограмм белгісін дәлелдеу қиын болмағандықтан сыныпты белсенді түрде қатыстыра отырып орындауға болады.

Параллелограмның 1-белгісі.

Теорема. Егер төртбұрыштың екі қабырғасы тең және параллель болса, онда бұл төртбұрыш параллелограмм болады.

Дәлелдеуі. ABCD төртбұрышында $AD\parallel BC$ және $AD=BC$ болсын (6.16-сурет).

1. Т.ш.б. $AD\parallel BC$ және AC қиюшысының айқын бұрыштары $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$.

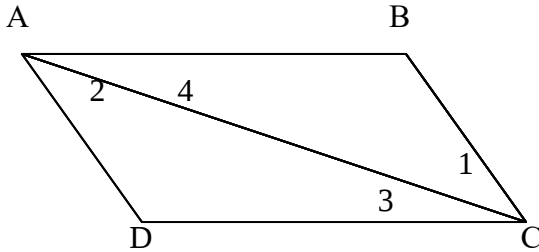
2. Т.ш.б. $AD=BC, AC$ қабырғасы ортақ, $\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow \triangle ABC = \triangle CDA$.

3. $\triangle ABC = \triangle CDA \Rightarrow \angle 3 = \angle 4$.

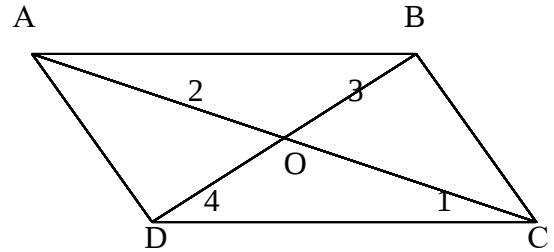
4. AB және CD қабырғаларын AC қиюшысының айқыш бұрыштары $\angle 3 = \angle 4 \Rightarrow AB \parallel CD$.

5.
$$\left. \begin{array}{l} AD \parallel BC \\ AB \parallel CD \end{array} \right\} \Rightarrow ABCD - \text{параллелограмм}.$$

Теорема дәлелденді.



6.16- сурет



6.17- сурет

Параллелограмның 2-белгісі.

Теорема. *Егер төртбұрыштың қарама-қарсы қабырғалары қос-қостан тең болса, онда бұл төртбұрыш параллелограмм болады.*

Дәлелдеуі. $ABCD$ төртбұрышында $AB=CD$ және $AD=BC$ болсын (6.16-сурет). AC диагоналы оны екі ABC және ADC үшбұрышына бөледі. Бұл үшбұрыштардың AC қабырғасы ортақ және былайғы қабырғалары қос-қостан тең. Онда үшбұрыштар теңдігінің 3-белгісі бойынша $\triangle ABC = \triangle CDA$. Олай болса, $\angle 1 = \angle 2$ және $\angle 3 = \angle 4$, яғни айқыш бұрыштар тең. Сондықтан $AB \parallel CD$ және $AD \parallel BC$. Онда $ABCD$ - параллелограмм. Белгі дәлелденді.

Параллелограмның 3-белгісі мен 4-белгісі оқушыларға өз бетінше дәлелдуге ұсынылады.

Теорема. *Егер төртбұрыштың қарама-қарсы бұрыштары тең болса, онда бұл төртбұрыш параллелограмм болады.*

Теорема. *Егер төртбұрыштың диагональдары қиылысу нүктесінде қаж бөлінсе, онда бұл төртбұрыш параллелограмм болады (6.17-сурет).*

Осы төрт белгінің әр қайсысын пайдаланып, төртбұрыштардың параллелограмм екендігін анықтауға есептер шығарылады.